

**Examenul de bacalaureat național 2013**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 3**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că numărul  $2(\sqrt{7}+1) - \sqrt{28}$  este natural.
- 5p** 2. Calculați  $f(1) + f(2) + \dots + f(10)$  pentru funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x - 1$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^{x+1} = 16$ .
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulțimea  $A = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ , acesta să fie multiplu de 7.
- 5p** 5. Se consideră punctele  $A, B$  și  $C$  astfel încât  $\overline{AB} = 2\vec{i} + \vec{j}$  și  $\overline{BC} = \vec{i} - \vec{j}$ . Calculați lungimea vectorului  $\overline{AC}$ .
- 5p** 6. Determinați  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  știind că  $\frac{3\sin x - 2\cos x}{\cos x} = 1$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real  $x$  se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$ .
- 5p** a) Calculați  $\det(A(2))$ .
- 5p** b) Arătați că  $A(1) \cdot A(2) = 5A(1)$ .
- 5p** c) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $\det(A(x)) = 0$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 - 2X^2 - 2X + m$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p** a) Pentru  $m = 3$ , calculați  $f(1)$ .
- 5p** b) Determinați numărul real  $m$  știind că restul împărțirii polinomului  $f$  la  $X - 2$  este egal cu 2.
- 5p** c) Pentru  $m = 4$ , arătați că  $(x_1 + x_2 + x_3) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) = 1$ , unde  $x_1, x_2, x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \ln x$ .
- 5p** a) Calculați  $f'(x)$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p** b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$ .
- 5p** c) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe intervalul  $(0, +\infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\int_0^1 x f(x) dx = \frac{1}{2} \ln 2$ .
- 5p** b) Calculați  $\int_0^1 x f'(x) dx$ .
- 5p** c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei  $Ox$  a graficului funcției  $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ .